

# Eine entscheidbare Klasse $n$ -stelliger Horn-Prädikate

Jochen Burghardt

GMD, Rudower Chaussee 5, D-12489 Berlin  
Tel \*49-30-6392-1867, Fax -1805, E-Mail jochen@first.gmd.de

## 1 Einleitung

Das Rechnen mit unendlichen Mengen von Grundtermen hat zahlreiche Anwendungen, speziell auf den Gebieten der Programmanalyse und des automatischen Beweisen: z.B. Typ-Inferenz in PROLOG, basierend auf einer oberen Abschätzung der Extension von Prädikaten [9]; Berechnung einfacher Invarianten imperativer Programme [8]; Beschreibung von Bildmengen von Abstraktionsfunktionen in Implementierungsbeweisen [2]; Beschreibung der Äquivalenzklassen von Grundtermen für E-Anti-Unifikation [6]; usw.

Allen Anwendungen ist als Mindestanforderung gemeinsam, daß der Durchschnitt zweier darstellbarer Term Mengen wieder darstellbar sein muß und daß entscheidbar sein muß, ob eine dargestellte Menge leer ist. In diesem speziellen Sinne wird hier von Entscheidbarkeit gesprochen. Die Leistungsfähigkeit eines Formalismus zur Beschreibung solcher Term Mengen hängt entscheidend ab von der Komplexität der Mengen, die er darzustellen in der Lage ist.

Der bekannteste Beschreibungsformalismus, reguläre Baumatomen [4], ist äquivalent zu Hornklauseln mit einstelligen Prädikaten und ausschließlich Variablen als Argumenten im Rumpf, bzw. in der Terminologie von [10] zu linearen Termdeklarationen.

In [12] werden semi-lineare Termdeklarationen zugelassen, d.h. mehrfache Vorkommen einer Variablen werden erlaubt, sofern die Listen der Funktionssymbole auf den Pfaden von der Wurzel zu den Vorkommen jeweils gleich sind; äquivalent dazu sind reguläre Baumatomen mit Gleichheitstests für direkte Unterterme [1], für nicht-direkte Unterterme wird die Disjunktheit der Sprachen bereits unentscheidbar [11].

In [2] werden reguläre Substitutionsmengen zugelassen, äquivalent dazu sind  $n$ -stellige Horn-Prädikate mit linearen Kopftermen  $f_1(\vec{x}_1), \dots, f_m(\vec{x}_m)$  und linearen Variablenvektoren  $\vec{x}^1, \dots, \vec{x}^n$  als Rumpffargumenten, sofern die  $\vec{x}_i$  die Zeilen- und die  $\vec{x}^j$  die

Spaltenvektoren einer verallgemeinerten Matrix bilden. Damit sind auch einfache Relationen wie z.B.  $x \leq y$  für  $x, y \in \mathcal{N}$  ausdrückbar.

$\Omega$ -Terme [5] entsprechen speziellen Hornklauselmengen, in denen für jedes Prädikat genau zwei Klauseln existieren, quasi eine für den Basis- und eine für den Rekursionsfall. Durch die starke Einschränkung der möglichen Rekursion auf die Struktur von  $\mathcal{N}$  wird es möglich, daß eine beschränkte Anzahl von Variablen beliebig oft und an beliebigen Stellen in beschreibenden  $\Omega$ -Termen vorkommen darf.

Im folgenden wird ein Ansatz vorgestellt, der auf einer mit der Unifikation kommutierenden Termordnung basiert und teilweise ausdrucksstärker ist als semi-lineare Term-Deklarationen.

## 2 Überblick

Sei eine endliche Menge  $\mathcal{CR}$  von Funktionssymbolen (genauer: Konstruktorsymbolen) mit ihren festen Stelligkeiten und eine unendliche Menge  $\mathcal{V}$  von Variablen gegeben; sei  $\mathcal{T}$  die Menge aller Terme über  $\mathcal{V} \cup \mathcal{CR}$ . Terme werden mit  $t, t', t_i, \dots$  bezeichnet, Variablen mit  $x, y, z, \dots$ , Funktionssymbole mit  $f, g, \dots$ , Prädikate mit  $p, q, \dots$ , Substitutionen mit  $\beta, \gamma, \dots$ ,  $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$  bezeichnet ein  $n$ -Tupel von Termen,  $vars(t)$  bezeichnet die Menge aller in  $t$  vorkommenden Variablen,  $dom(\beta) := \{x \in \mathcal{V} \mid \beta x \neq x\}$  bezeichnet den Definitionsbereich einer Substitution. Substitutionen werden oBdA. stets als idempotent und mit genügend großem Definitionsbereich angenommen, so daß für alle vorkommenden Anwendungen  $\beta t$  stets  $vars(t) \subset dom(\beta)$  ist. Bezeichnet  $\beta = mgu(t_1, t_2)$  die unifizierende Substitution für  $t_1$  und  $t_2$ , falls sie existiert, so ist  $lci(t_1, t_2) = \beta t_1 = \beta t_2$  die allgemeinste gemeinsame Instanz. Zu einer gegebenen irreflexiven Ordnungsrelation  $<$  bezeichnen wir mit  $\leq$  deren reflexive Hülle.

Eine Termmenge wird dargestellt als die Extension eines Prädikats  $p$ , das durch ein Horn-Programm der Form

$$\begin{array}{l} p_1(t_1) \leftarrow p_{11}(t_{11}) \wedge \dots \wedge p_{1n_1}(t_{1n_1}) \\ \mathbf{1:} \quad \dots \\ p_m(t_m) \leftarrow p_{m1}(t_{m1}) \wedge \dots \wedge p_{mn_m}(t_{mn_m}) \end{array}$$

gegeben ist, wobei die  $p_i$ , die  $p_{ij}$  und  $p$  keineswegs verschieden sein müssen. Fakten werden durch Klauseln mit  $n_i = 0$  dargestellt. Die  $t_i$  und die  $t_{ij}$  sind beliebige Terme, die folgenden Anforderungen genügen:

### Definition 2

1.  $vars(t_{ij}) \cap vars(t_{ij'}) = \{\}$  für  $1 \leq j \neq j' \leq n_i$ ,

2.  $t_{ij} \stackrel{*}{\preceq} t_i$  für  $1 \leq i \leq m$  und  $1 \leq j \leq n_i$ ,
3. dabei sei  $\stackrel{*}{\preceq}$  die reflexive Hülle einer Wohlordnung  $\prec^*$  mit endlichem Verzweigungsgrad, die in folgendem Sinne mit der Unifikation kommutiert:
4. zu  $t' \stackrel{*}{\preceq} t = lci(t_1, t_2)$  existieren stets  $t'_1 \stackrel{*}{\preceq} t_1$  und  $t'_2 \stackrel{*}{\preceq} t_2$  mit  $t' = lci(t'_1, t'_2)$ ,
5.  $\stackrel{*}{\preceq}$  sei abgeschlossen gegen alle Substitutionen  $\beta$ , die im Laufe der Algorithmen auftreten können<sup>1</sup>, d.h.  $t' \stackrel{*}{\preceq} t \Rightarrow \beta t' \stackrel{*}{\preceq} \beta t$ .

Man beachte, daß  $\stackrel{*}{\preceq}$  nicht gegen beliebige Substitutionen abgeschlossen sein muß. Die Prädikate werden der Einfachheit halber als einstellig geschrieben, Mehrstelligkeit läßt sich leicht durch  $n$ -Tupel codieren; in Beispielen verwenden wir dazu “:” als zweistelliges Funktionssymbol niedrigster Priorität. Verlangt man, daß die  $t_{ij}$  sämtlich Variablen sein müssen und die  $t_i$  linear bzw. semi-linear, so erhält man reguläre Baumsprachen bzw. semi-lineare Termdeklarationen.

Im folgenden werden die beiden Algorithmen *inh* zur Entscheidung der Erfüllbarkeit eines Prädikats und *inf* zur Berechnung der Konjunktion zweier Prädikate vorgestellt. Beide verlangen z.Zt. noch die – starke – Einschränkung  $n_i \leq 1$  für  $i = 1, \dots, m$ .

**Algorithmus 3** (Erfüllbarkeit: *inh*)

Sei ein Horn-Programm wie in 1 gegeben, wobei als zusätzliche Einschränkung  $n_i \leq 1$  für  $i = 1, \dots, m$  sei.  $inh_{\vee}(p^t, \{\})$  liefert *true* genau dann, wenn das Prädikat  $p$  durch eine Instanz des Terms  $t'$  erfüllbar ist.

1.  $inh_{\vee}(p^t, Occ) \Leftrightarrow inh_{\wedge}(p_1^{\beta_1 t_1}, Occ) \vee \dots \vee inh_{\wedge}(p_k^{\beta_k t_k}, Occ)$  (\*1)
2.  $inh_{\wedge}(p^t, Occ) \Leftrightarrow false$  für  $p^t \in Occ$ , (\*2)
3.  $inh_{\wedge}(p_i^{\beta_i t_i}, Occ) \Leftrightarrow inh_{\vee}(p_{i1}^{\beta_i t_{i1}}, Occ \cup \{p_i^{\beta_i t_i}\})$  für  $n_i = 1$ ,
4.  $inh_{\wedge}(p_i^{\beta_i t_i}, Occ) \Leftrightarrow true$  für  $n_i = 0$

(\*1): Dabei seien oBdA.  $p_1 = \dots = p_k = p$  sämtliche Klauselköpfe für  $p$ ,  
für die  $\beta_i := mgu(t', t_i)$  existiert.

(\*2): Der Test muß mod. gebundener Umbenennung durchgeführt werden.

**Algorithmus 4** (Konjunktion: *inf*)

Sei ein Horn-Programm wie in 1 gegeben, mit den zusätzlichen Einschränkungen

- $n_i \leq 1$  für  $i = 1, \dots, m$  und
- $\langle t_{i1}, t_{i'1} \rangle \stackrel{*}{\preceq} \langle t_i, t_{i'} \rangle$  für alle  $i, i' \in \{1, \dots, m\}$  (als Verschärfung von 2.2).

---

<sup>1</sup>Diese Einschränkung wird später formal präzisiert, vgl. Definition 14 ff.

Seien zwei Prädikate  $p_{i_1}, p_{i_2}$  gegeben. Der Algorithmus führt einen neuen Prädikatnamen ein, der hier mit  $p_{i_1 p_{i_2}}$  bezeichnet wird, und definiert neue Klauseln dafür, so daß  $p_{i_1 p_{i_2}}(x) \Leftrightarrow p_{i_1}(x) \wedge p_{i_2}(x)$  wird:

Für alle Klauseln<sup>2</sup> von  $p_{i_1}$  und  $p_{i_2}$ , für die  $t_{i_1}$  und  $t_{i_2}$  etwa durch  $\beta$  unifizierbar sind, definiere eine neue Klausel  $p_{i_1 p_{i_2}}(\beta t_{i_1}) \leftarrow p_{i_1 p_{i_2}}(\beta t_{i_1})$ .

Verfahre in der gleichen Weise mit  $p_{i_1 p_{i_2 1}}$ , usw.

Die partielle Korrektheit der beiden Algorithmen ist jeweils relativ leicht zu zeigen, indem die in [2] für reguläre Baumsprachen angewandte Methodik entsprechend verallgemeinert wird; statt der Termstruktur dient jetzt die Wohlordnung  $\prec^*$  als Grundlage für die Induktionsbeweise, Einzelheiten werden in [3] ausgeführt. Ohne die Einschränkung  $n_i \leq 1$  müßte Regel 3.3 lauten

$$inh_{\wedge}(p_i^{\beta_i t_i}, Occ) \Leftrightarrow inh_{\vee}(p_{i1}^{\beta_i t_{i1}}, Occ') \wedge \dots \wedge inh_{\vee}(p_{in_i}^{\beta_i t_{in_i}}, Occ') \text{ für } n_i > 0$$

und es müßte sichergestellt werden, daß  $\beta_i t_{i1}, \dots, \beta_i t_{in_i}$  paarweise disjunkte Variablen haben. Z.Zt. wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen die Bedingung  $n_i \leq 1$  fallengelassen werden kann. Damit könnte der vorgestellte Ansatz u.U. eine echte Obermenge der semi-linearen Termdeklarationen abdecken.

Für die Terminierungsbeweise definieren wir für  $T \subset \mathcal{T}$ :

1.  $lci(T) := \{lci(t_1, \dots, t_n) \mid t_1, \dots, t_n \in T, lci(t_1, \dots, t_n) \text{ existiert}\},$
2.  $less(T) := \{t \mid t \preceq^* t' \in T\},$

Für  $T$  endlich ist  $lci(T)$  und wegen 2.3 auch  $less(T)$  endlich, also auch  $lci \circ less(T)$ . Aus 2.4 folgt sofort, daß  $less \circ lci(T) \subset lci \circ less(T)$ . Damit gilt:

**Lemma 5** Wird  $inh_{\vee}(p^{t'}, Occ)$  oder  $inh_{\wedge}(p^{t'}, Occ)$  direkt oder indirekt von  $inh_{\vee}(q^{t''}, \{\})$  aufgerufen, so gilt  $t' \in lci \circ less(\{t_1, \dots, t_m, t''\})$ .

Induktion über die Indirektionsstufe des aktuellen Aufrufs: Für den ersten Aufruf von  $inh$  ist nichts zu zeigen. Fallunterscheidung, durch welche Regel des Algorithmus 3 der aktuelle Aufruf entstanden ist:

1.  $\beta_i t_i$   
 $= lci(t', t_i)$  nach (\*1) zu 3.1  
 $\in lci \circ lci \circ less(\{t_1, \dots, t_m, t''\})$  nach Induktionsvoraussetzung  
 $= lci \circ less(\{t_1, \dots, t_m, t''\})$  da  $lci$  idempotent

2.,4. Es entsteht kein neuer Aufruf.

---

<sup>2</sup>OBdA. werden hier nur die Klauseln  $i_1$  und  $i_2$  selbst betrachtet.

3.  $\beta_i t_{i1}$ 

$$\begin{aligned} &\in less \circ lci \circ less(\{t_1, \dots, t_m, t''\}) && \text{nach I.V., da } \beta_i t_{i1} \stackrel{*}{\preceq} \beta_i t_i \\ &\subset lci \circ less \circ less(\{t_1, \dots, t_m, t''\}) && \text{nach 2.4, s.o.} \\ &= lci \circ less(\{t_1, \dots, t_m, t''\}) && \text{da } less \text{ idempotent} \end{aligned}$$

Also treten nur endlich viele verschiedene “Exponenten” auf; wegen der Regel 3.2 wird *inh* nie zweimal mit demselben Argument (mod. Umbenennung) aufgerufen, so daß der Algorithmus terminiert. Die Terminierung von *inf* ist trivial.

**Beispiel 6** 0 und *s* seien null- bzw. einstellige Konstruktoren.

Gegebene Klauseln:

1.  $p(ssx : sy) \leftarrow p(sx : y)$
2.  $p(x : 0)$
3.  $q(sx : sx) \leftarrow q(x : x)$
4.  $q(0 : x)$

Berechnung der Konjunktion von *p* und *q* nach Algorithmus 4:

5.  $pq(ssx : ssx) \leftarrow pq(sx : sx)$  aus 1. und 3.
6.  $pq(0 : 0)$  aus 2. und 4.

Es gilt  $pq(x : y) \Leftrightarrow p(x : y) \wedge q(x : y)$ ; die Erfüllbarkeit von *pq* ist wegen 6. trivial.

Feststellung der Unerfüllbarkeit von  $pq(ssx : ssx)$  nach Algorithmus 3:

$$\begin{aligned} &inh_{\vee}(pq^{ssx:ssx}, \{\}) \\ \Leftrightarrow &inh_{\wedge}(pq^{ssx:ssx}, \{\}) && \text{Regel 3.1} \\ \Leftrightarrow &inh_{\vee}(pq^{sx:sx}, \{pq^{ssx:ssx}\}) && \text{Regel 3.3} \\ \Leftrightarrow &inh_{\wedge}(pq^{ssx:ssx}, \{pq^{ssx:ssx}\}) && \text{Regel 3.1} \\ \Leftrightarrow &false && \text{Regel 3.2} \end{aligned}$$

Im folgenden wird eine konkrete Ordnung  $\prec^*$  konstruiert, die die Bedingungen aus Definition 2 erfüllt. Dazu wird in Abschnitt 3 zunächst eine Termdarstellung eingeführt, die invariant gegen gebundene Umbenennung ist und jeden Term durch seine Baumpfade und die Kongruenzrelation gleicher Unterterme (insbesondere Variablen) repräsentiert.

### 3 Terme als Pfadmengen mit Kongruenzrelationen

Sei “.” eine assoziative Operation mit “ $\varepsilon$ ” als neutralem Element. Die Menge  $\mathcal{P}$  aller markierten Baumpfade ist definiert als kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\in \mathcal{P} \\
f &\in \mathcal{P} \quad \text{falls } f \in \mathcal{CR} \text{ nullstellig} \\
f.i.p &\in \mathcal{P} \quad \text{falls } f \in \mathcal{CR} \text{ } n\text{-stellig, } i \in \{1, \dots, n\}, p \in \mathcal{P}
\end{aligned}$$

Die Menge  $paths(t)$  aller (Teil-)Pfade eines Terms  $t$  ist definiert durch:

$$\begin{aligned}
paths(x) &= \{\varepsilon\} && \text{für } x \in \mathcal{V} \\
paths(f) &= \{f, \varepsilon\} && \text{für } f \in \mathcal{CR} \text{ nullstellig} \\
paths(f(t_1, \dots, t_n)) &= \{f.i.p \mid p \in paths(t_i), 1 \leq i \leq n\} \cup \{\varepsilon\} && \text{für } f \in \mathcal{CR} \text{ } n\text{-stellig}
\end{aligned}$$

Pfade werden mit  $p, p', p_i, q, \dots$  bezeichnet, aus dem Zusammenhang wird stets klar, ob etwa  $p$  einen Pfad oder ein Prädikat meint. Für  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$  definiere

$$\begin{aligned}
p.f.i \text{ sibl } p.f.j &\quad \text{für alle } p, f \text{ } n\text{-stellig, } 1 \leq i, j \leq n \\
p \text{ pref } p.p' &\quad \text{für alle } p, p' \\
&\text{(Gleichheit mod. Assoziativität und Neutralität)}
\end{aligned}$$

Z.B. für  $+$  zweistellig und  $s$  einstellig ist  $s.1 \text{ pref } s.1.+.1$ , aber nicht  $s \text{ pref } s.1.+.1$ .  
Definiere den Unterterm  $t/p$  eines Terms  $t$  am Ende eines Pfads  $p \in paths(t)$  durch:

$$\begin{aligned}
t/\varepsilon &= t \\
f(t_1, \dots, t_n)/f.i.p &= t_i/p \quad \text{für } 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Zu gegebenem Term  $t$  definiere  $(\equiv_t)$  als die kleinste Kongruenzrelation auf  $\mathcal{P}$  mit  $\forall p_1, p_2 \in P \quad p_1 \equiv_t p_2 \Leftrightarrow t/p_1 = t/p_2$ , wobei rechts syntaktische Gleichheit steht (nicht mod. Umbenennung).  $(\equiv_t)$  muß mit “.” verträglich sein in folgendem Sinne:  $p_1 \equiv_t p_2 \Rightarrow p_1.p \equiv_t p_2.p$ . Für eine beliebige Relation  $(R) \subset \mathcal{P} \times \mathcal{P}$  sei  $c_{rf}(R)$  der reflexive,  $c_{sm}(R)$  der symmetrische und  $c_{tr}(R)$  der transitive Abschluß von  $(R)$ ; für eine Kongruenzrelation  $(\equiv)$  definiere darüber hinaus die folgenden Abschlußoperationen, wobei  $P \subset \mathcal{P}$  sei:

$$\begin{aligned}
c_{mx}(\equiv) &:= (\equiv) \cup \{ \langle p_1, p_2 \rangle \mid p_1.f.i \equiv p_2.f.i \text{ für alle } i = 1, \dots, n, f \text{ } n\text{-stellig,} \} \\
c_{mx}^\infty(\equiv) &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} c_{mx}^i(\equiv) \\
c_{(\equiv)}(P) &:= \{ p_1 \mid p_1 \equiv p_2 \in P \}
\end{aligned}$$

Eine Substitution  $\beta$  heißt linear, wenn  $\beta\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  linearer Term ist, wobei  $dom(\beta) = \{x_1, \dots, x_n\}$  sei. Eine Substitution  $\beta$  heißt flach, wenn  $\beta x \in \mathcal{V}$  für alle  $x \in dom(\beta)$ . Eine lineare und flache Substitution heißt Umbenennungssubstitution. Jede Substitution  $\beta$  läßt sich in eine flache und eine lineare Substitution zerlegen:  $\beta = \beta_1 \circ \beta_2$  mit  $\beta_1$  flach und  $\beta_2$  linear.

**Satz 7** Zu  $P \subset \mathcal{P}$  und  $(\equiv)$  Kongruenzrelation auf  $P$  gibt es einen Term  $t$  mit  $paths(t) = P$  und  $(\equiv_t) = (\equiv)$  genau dann, wenn

1.  $\{\} \neq P \subset \mathcal{P}$  endlich,
2.  $P$  ist abgeschlossen gegen  $\text{sibl} \circ \text{pref}$ ,  
d.h. für  $p \in P$  und  $p' \text{ sibl} \circ \text{pref } p$  ist auch  $p' \in P$ ,
3.  $P$  ist abgeschlossen gegen  $(\equiv)$ , d.h. für  $p_1 \in P$  und  $p_1 \equiv p_2$  folgt  $p_2 \in P$ ,
4.  $P$  ist verträglich mit  $(\equiv)$ ,  
d.h. für  $p_1 \equiv p_2$  und  $p_1.f_1.p'_1, p_2.f_2.p'_2 \in P$  folgt  $f_1 = f_2$ ,
5.  $(\equiv)$  ist Kongruenz, d.h. für  $p_1 \equiv p_2$  ist auch  $p_1.p \equiv p_2.p$
6.  $(\equiv)$  ist maximal,  
d.h. falls  $f$   $n$ -stellig und  $p_1.f.i \equiv p_2.f.i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ , ist schon  $p_1 \equiv p_2$ ,

Bedingung 2. ist äquivalent zur Abgeschlossenheit gegen  $\text{sibl}$  und gegen  $\text{pref}$ , da beide Relationen reflexiv sind. Man beachte, daß 1. und 2. automatisch erfüllt sind, wenn  $P = \text{paths}(t')$  für ein  $t'$  ist; 5. und 6. sind automatisch erfüllt, wenn  $(\equiv) = (\equiv_{t'})$  für ein  $t'$  ist.

In Bedingung 1. kann die Forderung nach Endlichkeit von  $P$  auch weggelassen werden, man erhält dann die gleichen Resultate für unendliche Terme. Bedingung 4. ist ebenfalls nicht unbedingt notwendig. Auf sie zu verzichten hieße, Terme zu verallgemeinern auf gegen Generalisierung (Anti-Instanzen) abgeschlossene Term mengen. Damit würde  $\text{lci}$  zu einer totalen Operation und man erhielte einen Verband statt eines oberen Halbverbands. Allerdings ist unklar, ob es dafür eine Anwendung gibt.

Es gelten folgende **Sätze**:

- 8:** Es gibt ein  $\beta$  mit  $t = \beta t'$  gdw.  $\text{paths}(t') \subset \text{paths}(t)$  und  $(\equiv_{t'}) \subset (\equiv_t)$ .  
In diesem Fall gilt  $\beta$  linear genau dann, wenn  $(\equiv_{t'}) = (\equiv_t)$ ,  
sowie  $\beta$  flach genau dann, wenn  $\text{paths}(t') = \text{paths}(t)$ .
- 9:**  $t$  ist durch  $\langle \text{paths}(t), (\equiv_t) \rangle$  bis auf Umbenennung eindeutig bestimmt.
- 10:** Sei  $t = \text{lci}(t_1, \dots, t_n)$ , dann gilt:  $(\equiv_t) = c_{mx}^\infty \circ c_{tr}((\equiv_{t_1}) \cup \dots \cup (\equiv_{t_n}))$  und  
 $\text{paths}(t) = c_{(\equiv_t)}(\text{paths}(t_1) \cup \dots \cup \text{paths}(t_n))$ .
- 11:** Sei  $t = \text{lci}(t_1, \dots, t_n)$ , dann gilt:  $(\equiv_{t_i}) \subset (\equiv)$  für  $i = 1, \dots, n \Rightarrow (\equiv_t) \subset (\equiv)$ ,  
insbesondere:  $t_i$  linear für  $i = 1, \dots, n \Rightarrow t$  linear.

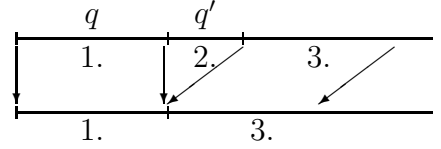
Abbildung 1 auf Seite 9 zeigt in der oberen und der unteren Zeile jeweils ein Unifikationsbeispiel; punktierte Linien deuten die Kongruenzrelation an.

## 4 Streichungen in Pfaden

Mit der Termdarstellung aus Abschnitt 3 kann nun eine Ordnung auf Termen definiert werden, die die Anforderungen aus Definition 2 erfüllt.

Eine Streichung ist ein Paar von Pfaden, geschrieben  $q \leftarrow q.q'$ . Definiere die Ausführung der Streichung durch:

1.  $del(q \leftarrow q.q', p) = \{p\}$  falls  $q \text{ präf } p$
2.  $del(q \leftarrow q.q', q.p) = \{\}$  falls  $q.q' \text{ präf } q.p$
3.  $del(q \leftarrow q.q', q.q'.p) = \{q.p\}$  sonst



$del(q \leftarrow q.q', p)$  liefert eine maximal einelementige Pfadmene. Für eine Pfadmene  $P$  definiere  $del(q \leftarrow q.q', P) := \bigcup_{p \in P} del(q \leftarrow q.q', p)$ ; für eine Folge von Streichungen  $S = \langle q_1 \leftarrow q_1.q'_1, \dots, q_n \leftarrow q_n.q'_n \rangle$  definiere  $del(S, P) := del(q_n \leftarrow q_n.q'_n, \dots del(q_1 \leftarrow q_1.q'_1, P) \dots)$ . Es gilt stets  $del(S, p_1) = del(S, p_2) \neq \{\} \Rightarrow p_1 = p_2$ .

Eine Streichungsfolge  $S$  auf  $P \subset \mathcal{P}$  heißt verträglich mit einer Kongruenzrelation ( $\equiv$ ) genau dann, wenn  $del(S, p_1) \neq \{\} \Leftrightarrow del(S, p_2) \neq \{\}$  für alle  $p_1 \equiv p_2$  ist. In diesem Fall definiere  $p'_1 \equiv_S p'_2 :\Leftrightarrow p_1 \equiv p_2$  für  $del(S, p_1) = \{p'_1\}$  und  $del(S, p_2) = \{p'_2\}$ , sowie  $del(S, (\equiv)) := c_{mx}^\infty(\equiv_S)$ .

Ist  $S$  verträglich mit  $(\equiv_t)$ , so gibt es genau ein  $t'$  mit

- $paths(t') = del(S, paths(t))$ ,
- $(\equiv_{t'}) = del(S, (\equiv_t))$  und
- $t'/_{p'} = t/_p$  für alle  $p \in paths(t)$  mit  $t/_p \in \mathcal{V}$  und  $del(S, p) = \{p'\}$ .

Definiere  $del(S, t) := t'$  sowie  $t' \preceq t :\Leftrightarrow \exists S \ t' = del(S, t)$ .

Die Wohlfundiertheit von  $\prec$  folgt daraus, daß  $\prec$  eine Unterrelation der Einbettungsordnung nach [7] ist. Auf der Menge der linearen Terme sind beide Ordnungen identisch. Abbildung 1 zeigt in der linken, mittleren und rechten Spalte jeweils eine Anwendung von  $del(f.3 \leftarrow f.3.g_3.1, \dots)$ .

### Satz 12

Zu  $t' \preceq t = lci(t_1, \dots, t_n)$  existieren  $t'_1 \preceq t_1, \dots, t'_n \preceq t_n$  mit  $t' = lci(t'_1, \dots, t'_n)$ .

Siehe Beispiel in Abbildung 1.

Für  $t' = del(S, t)$  ist nicht immer  $\beta t' = del(S, \beta t)$ , sondern nur dann, wenn  $S$  nicht nur mit  $(\equiv_t)$ , sondern darüber hinaus auch mit  $(\equiv_{\beta t})$  verträglich ist. Zur Sicherstellung der Forderung 2.5 verlangen wir daher die Existenz einer globalen Kongruenzrelation  $(\equiv^*)$  mit folgenden Eigenschaften:



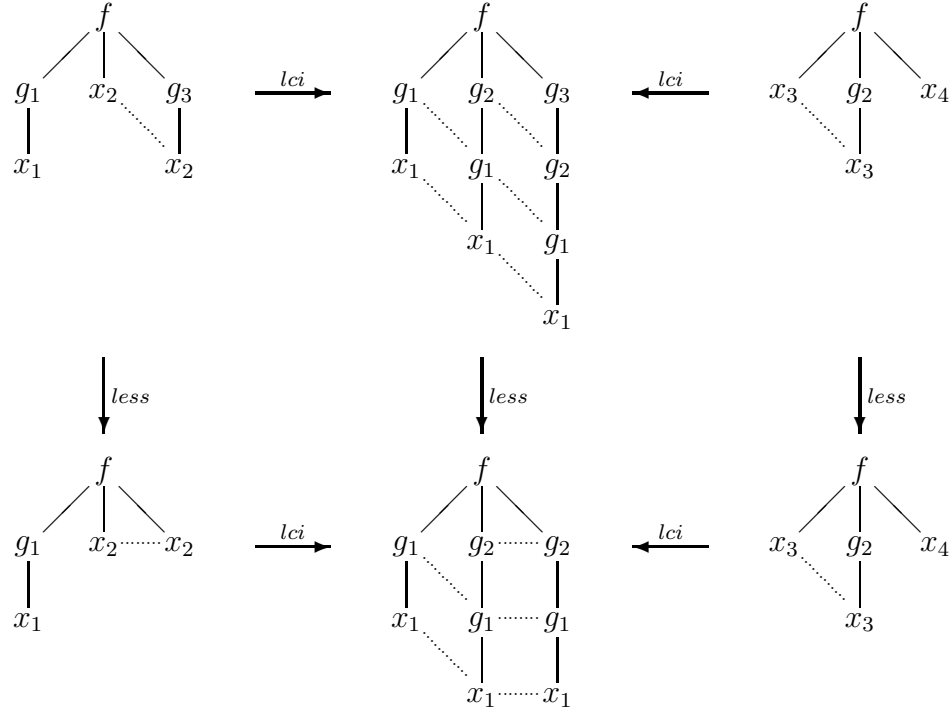


Abbildung 1: Beispiel zu Satz 12

### Definition 13

1.  $(\equiv^*)$  ist maximal im Sinne von 7.6, d.h. abgeschlossen gegen  $c_{mx}$ ,
2.  $(\equiv^*)$  ist abgeschlossen gegen konsistente Streichungen,  
d.h. für  $(\equiv_t) \subset (\equiv^*)$  und  $S$  verträglich mit  $(\equiv^*)$  ist auch  $(\equiv_{del(S,t)}) \subset (\equiv^*)$ .

Von einem wie in 1 gegebenen Horn-Programm verlangen wir, daß  $(\equiv_{\langle t_i, t_{i'} \rangle}) \subset (\equiv^*)$  und  $(\equiv_{t_i}) \subset (\equiv^*)$  für alle  $1 \leq i, i' \leq m$ . Man beachte, daß  $(\equiv^*)$  i.allg. nicht als  $(\equiv_t)$  für irgend einen Term  $t$  darstellen läßt.

**Definition 14** Wir definieren  $t' \preceq^* t$  genau dann, wenn  $(\equiv_t) \subset (\equiv^*)$  ist und es eine mit  $(\equiv^*)$  verträgliche Streichungsfolge  $S$  gibt, so daß  $t' = del(S, t)$ .

Als Unterrelation von  $\prec$  ist  $\preceq^*$  ebenfalls Wohlordnung, und Satz 12 folgt leicht auch für  $\preceq^*$ . Damit erfüllt  $\preceq^*$  alle Forderungen aus Definition 2, wobei 2.5 präzisiert wird zu

**2.5':** 
$$t' \preceq^* t \wedge (\equiv_{\beta t}) \subset (\equiv^*) \Rightarrow \beta t' \preceq^* \beta t.$$

Die dadurch in den Terminierungsbeweisen zusätzlich notwendigen Voraussetzungen kann man mit Hilfe von Satz 11 leicht zeigen; etwa in der zweiten Zeile von Fall 3.

im Beweis von Lemma 5 ist  $(\equiv_{\beta_i t_i}) \subset (\equiv^*)$ , da  $(\equiv_{t_i}) \subset (\equiv^*)$  und  $(\equiv_{t'}) \subset (\equiv^*)$  nach Induktionsvoraussetzung, damit ist nach 13.2 auch  $(\equiv_{\beta_i t_{i1}}) \subset (\equiv^*)$ .

In Beispiel 6 wird  $(\equiv^*)$  induziert von  $(: .1) \equiv^* (: .2)$ , und die einzige vorkommende Streichungsfolge ist  $\langle (: .1) \leftarrow (: .1.s.1), (: .2) \leftarrow (: .2.s.1) \rangle$ . An einer hinreichenden Bedingung für 13.2, die die konstruktive Berechnung von  $(\equiv^*)$  aus den in einem gegebenen Horn-Programm vorkommenden  $(\equiv_{t_i})$  und  $(\equiv_{t_{ij}})$  erlaubt, wird z.Zt. gearbeitet.

## 5 Ausblick

Darüber hinaus scheint es interessant, die sich aus Definition 2 ergebenden Forderungen an  $\preceq^*$  zunächst abstrakt zu formulieren und weitere konkrete “Implementierungen” von  $\preceq^*$  zu untersuchen. In diesem Zusammenhang werden Abbildungen  $\varphi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  untersucht, für die gilt

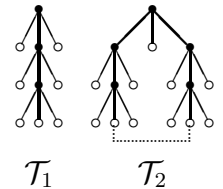
$$\begin{aligned} \varphi(lci(t_1, t_2)) &= lci(\varphi(t_1), \varphi(t_2)) & \text{und} \\ \varphi(t) &\leq t & \text{bzgl. einer beliebigen Wohlordnung } < \end{aligned}$$

Eine solche Abbildung ist durch ihr Verhalten auf  $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  schon eindeutig bestimmt, wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &:= \{t \in \mathcal{T} \mid \exists p \in \mathcal{P} \quad paths(t) = c_{sibl} \circ pref(\{p\})\} & \text{und} \\ \mathcal{T}_2 &:= \{t \in \mathcal{T} \mid \exists p_1 \neq p_2 \in \mathcal{P} \quad paths(t) = c_{sibl} \circ pref(\{p_1, p_2\}), \\ &\quad (\equiv_t) = c_{sm} \circ c_{rf}(\{\langle p_1, p_2 \rangle\})\} & . \end{aligned}$$

Auf Seite 10 sind zwei Elemente von  $\mathcal{T}_1$  bzw.  $\mathcal{T}_2$  skizziert.  $lci(\mathcal{T}_1)$  ist gerade die Menge aller linearen Terme; und  $lci(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \mathcal{T}$ . Für  $lci(t_1, t_2) = t \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  muß schon  $t = t_1$  oder  $t = t_2$  bis auf Umbenennung sein. Es gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich eine vorgegebene Zuordnung  $t_1 \mapsto t_{11}, \dots, t_m \mapsto t_{m1}$  zu einer Abbildung  $\varphi$  mit den obigen Eigenschaften fortsetzen läßt.

Damit läßt sich  $\preceq^*$  allgemeiner als in Def. 14 definieren durch  $t' \preceq^* t :\Leftrightarrow \exists \varphi \quad t' = \varphi(t)$ ; und es können auch noch Horn-Programme wie das für *reverse* behandelt werden, in denen beim Übergang vom Kopf zum Rumpf Konstruktorsymbole von einem Argument in ein anderes (lexikographisch nachrangiges) geschoben werden.



## 6 Literatur

- [1] Equality and disequality constraints on direct subterms in tree automata, B. Bogaert, S. Tison, in: Proc. Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, Springer, P. 161-171, 1992
- [2] Eine feinkörnige Sortendisziplin und ihre Anwendung in der Programmkonstruktion, Jochen Burghardt, Dissertation, GMD Report 212, Oldenbourg, 1993
- [3] A decidable class of  $n$ -ary Horn predicates, J. Burghardt, Technical Report, GMD, forthcoming
- [4] Equational formulas in order-sorted algebras, Hubert Comon, in: Proc. ICALP, Warwick, Springer-Verlag, Jul 1990
- [5] On unification of terms with integer exponents, Hubert Comon, Research Report 770, L.R.I., Univ. Paris-Sud, Orsay, 1992
- [6] Lemma Discovery by Anti-Unification of Regular Sorts, Birgit Heinz, TU Berlin, Technical Report 94-21, 1994
- [7] Computation and Deduction, Huet, G., International Summer School on Logic of Programming and Calculi of Discrete Design, (Chapter 4: Termination), Marktoberdorf 1986
- [8] Flow analysis and optimization of LISP-like structures, Jones, N.D., Muchnick, S.S., in: Sixth Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages, p. 244–256, Jan 1979
- [9] Towards a theory of types in Prolog, P. Mishra, in: Proc. 1984 Inter. Symp. on Logic Programming, p. 289-298, 1984
- [10] Computational aspects of an order-sorted logic with term declarations, M. Schmidt-Schauß, Univ. Kaiserslautern, Dissertation, FB Informatik, April 1988, LNAI 395, 1989
- [11] Automates avec tests d'égalités entre cousins germains, M. Tommasi, LIFL-IT report, 1991
- [12] Sorted Unification Using Set Constraints, T.E. Uribe, in: Proc. CADE-11, LNCS 607, p. 163-177, 1992